دربارهٔ گسترش توابع ناپیوسته

ابوالحسن فریدونی
استادیار دانشگاه ایلام

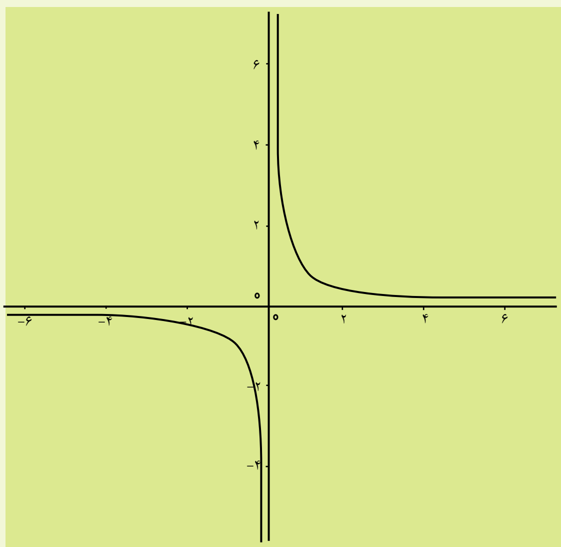
اشاره

وقتی از تابعی مثل $f(x)=\frac{۱}{x}:R-\{۰\}\to R$ صحبت می‌شود، می‌گویند تابع در $R-\{۰\}$ پیوسته است. ولی بعد از آن مکرر اتفاق می‌افتد که این بیان نقض می‌شـــود؛ بدین‌صورت که گفته می‌شـــود: «تابع f در صفر ناپیوسته است». در صورتی که صحبت از پیوســـتگی یا ناپیوستگی یک تابع در خارج از دامنهٔ آن نادرست است. در این مقاله به این گفتهٔ تناقض‌آمیز می‌پردازیم و نشان می‌دهیم دلیلی کاملاً ریاضی پشت این نوع بیان وجود دارد. برای بررسی این مشکل قضایایی را بیان خواهیم کرد که بر مبنای آن‌ها می‌توان برخی از توابع ناپیوسته را به توابعی پیوسته گسترش داد.

کلیدواژه‌ها: پیوستگی، نقطهٔ چسبیدگی، ناپیوستگی رفع‌شدنی، مجموعهٔ بسته

مقدمه

به‌نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ نگاه کنید. آیا این تابع پیوسته است؟



دامنـــهٔ f برابـــر $D_f=R-\{۰\}$ اســـت. بنابر تعریف پیوستگی، در هر $x\in D_f$ تابع f پیوسته است. اما شهود دانش‌آموزان و حتی ما نمی‌تواند بپذیرد که این تابعی پیوسته باشـــد. چون در اطراف صفر یک ســـر تابع به $+\infty$ و یک ســـر دیگر آن به $-\infty$ می‌رود؛ پیوســـتگی‌ای که هیچ کدام از ما آن را باور نمی‌کند، چه رسد به دانش‌آموزان. بنابراین گفته می‌شود که تابع در نقطهٔ صفر ناپیوســـته است. درواقع اشتباهی رایج اتفاق می‌افتد و ما به یک‌باره صفر را جزو دامنهٔ تابع به حساب می‌آوریم. اما چرا این اشتباه بسیار شایع است؟ دلیلش آن است که ما به‌طور شهودی نقطهٔ صفر را خارج از دامنهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ به حساب نمی‌آوریم؛ زیرا نقطهٔ صفر را به $D_f=R-\{۰\}$ چسبیده می‌بینیم. از لحاظ ریاضی هم این درک کاملاً درســـت اســـت. در ادامه خواهیم گفت که نقطهٔ صفر یک نقطه چسبیدگی (حدی) $D_f=R-\{۰\}$ است.[۱]

تابع $f(x)=\frac{۱}{x}:R-\{۰\}\to R$ را می‌توان به‌صورت زیر به تابع $f:R\to R$ با تعریف $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x\in R-\{۰\},\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ گسترش

داد. می‌بینیم که $\bar{f}$ روی R پیوسته نیست. این ناپیوستگی با شهود ما سازگار است.

تعریف ۱. تابع $f: D_f \to R$ پیوسته است، اگر در هر نقطه از دامنهٔ آن پیوسته باشد.

تعریف ۲. تابع $f: D_f \to R$ در نقطه $x \in D_f$ دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی است، اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\} \subset D_f$ که $\lim_{x_n \to x} f(x_n),\ x_n \to x$ موجود باشد.

تعریف ۳. زیر مجموعهٔ A از R را در نظر بگیرید. نقطهٔ $x \in R$ را یک نقطهٔ چسبیدگی (حدی) A گوییم اگر یک دنبالهٔ $\{x_n\} \subset A$ موجود باشد که $x_n \to x$ مجموعهٔ نقاط حدی A را با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم.

مثلاً $\bar{Q} = R$ و $\overline{(a,b)} = [a,b]$

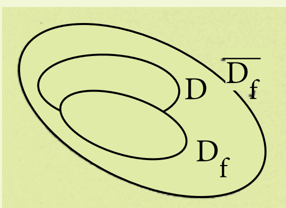
تعریف ۴. تابع $f: D_f \to R$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ D را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \left\{ x \in \bar{D}_f \,\middle|\, \forall \{x_n\} \subset D_f, x_n \to x : \text{موجود است} \lim_{x_n \to x} f(x_n) \right\},$$

و تابع $\bar{f}$ را به این صورت معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \bar{f}: D \to R \\ \bar{f}(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n), \{x_n\} \subset D_f, \end{cases}$$

پیداست که $D \subset \bar{D}_f$ اگر $x \in D \cap D_f$ باشد. پس $\lim_{x_n \to x} f(x_n)$ موجود است؛ یعنی ناپیوستگی رفع‌شدنی است. اگر $x \in D_f - D$، $\lim_{x_n \to x} f(x_n)$ موجود نیست و ناپیوستگی رفع‌شدنی است.



اکنون نشان می‌دهیم، تعریف $\bar{f}$ خوش تعریف است. بدین‌معنی که اگر $x \in D$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در تعریف D صدق کند و:

$$t = \lim_{n \to \infty} f(x_n),\ \ w = \lim_{n \to a} f(y_n)$$

آن‌گاه t=w. اگر بنا به فرض خلف برابر نباشند، تعریف کنید:

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{زوج } n, \\ y_n & \text{فرد } n, \end{cases}$$

چون $x_n \to x$ و $y_n \to x$، پس: $z_n \to x$، ولی $\lim_{n \to \infty} f(z_n)$ موجود نیست، پس: $x \notin D$. پس فرض خلف باطل است و t=w. به عبارت دیگر:

$$\bar{f}(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{y_n \to x} f(y_n).$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: تعریف کنید: $f: R - \{0\} \to R$،

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{گویا } x, \\ -1 & \text{اصم } x. \end{cases}$$

همچنین قرار دهید:

$$x_n=\left\{\frac{۱}{n}\right\} \quad و \quad y_n=\left\{\sqrt{\frac{۱}{n}}\right\}$$

پیداست که: $x_n \to ۰$ و $y_n \to ۰$، ولی:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=۱\neq -۱=\lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

نشان می‌دهیم: $۰\notin D$. در تعریف D، هر دنباله که به x همگراست، باید بررسی شود، اگر تعریف کنیم:

$$z_n=\begin{cases}\frac{۱}{n} & \text{فرد } n,\\ \sqrt{\frac{۱}{n}} & \text{زوج } n,\end{cases}$$

آن‌گاه: $z_n \to ۰$، ولی $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ موجود نیست. پس $x=۰\notin D$ و $\overline{f}(۰)$ قابل تعریف نیست.

مثال اخیر نمی‌تواند مثال نقضی برای خوش تعریفی تعریف D باشد.

قضیهٔ ۱. تابع $f:D_f\to R$ را در نظر بگیرید. همهٔ نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است، اگر و تنها اگر: $D_f\subset D$.

برهان: فرض کنید همهٔ نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است. برای هر $x\in D_f$ و برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}\subset D_f$ که $x_n\to x$، $\lim_{x_n\to x} f(x_n)$ موجود است. پس: $x\in D$.

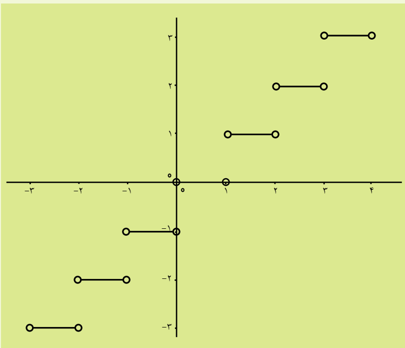
برعکس، فرض کنید $D_f\subset D$، طبق تعریف D، f در همهٔ نقاط D_f دارای حد است. پس نقاط ناپیوستگی آن رفع‌شدنی است.

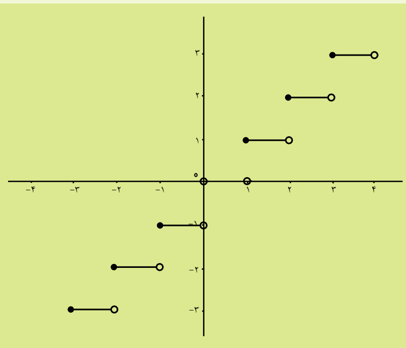
نتیجه: تابع $f:D_f\to R$ دارای ناپیوستگی رفع‌نشدنی است، اگر و تنها اگر: $D_f\not\subset D$.

مثال ۲: تابع $f(x)=[x]:R\to R$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$D_f=R,\quad D=R-Z\Rightarrow D_f\not\subset D.$$

بنا به نتیجهٔ قبل، نقاط ناپیوستگی $f(x)=[x]:R\to R$ رفع‌شدنی نیست. به‌علاوه: $\overline{D_f}=R\neq D$.





مثال ۳. برای تابع $f(x)=[x]:R-Z\to R$ داریم:

$$D_f=R-Z,\quad D=R-Z\Rightarrow D_f=D.$$

f در همه جا روی $D=R-Z$ پیوسته است. همچنین: $\overline{D_f}=R\neq D$ و:

$$f=\overline{f}:R-Z\to R$$

مثال ۴. تابع $f:R\to R$ را با تعریف:

$$f(x)=xX_{R-Z}(x)=\begin{cases}x & x\notin Z,\\ ۰ & x\in Z,\end{cases}$$

در نظر بگیرید. داریم:

$$D_f=R,\ D=R\Rightarrow D_f=D.$$

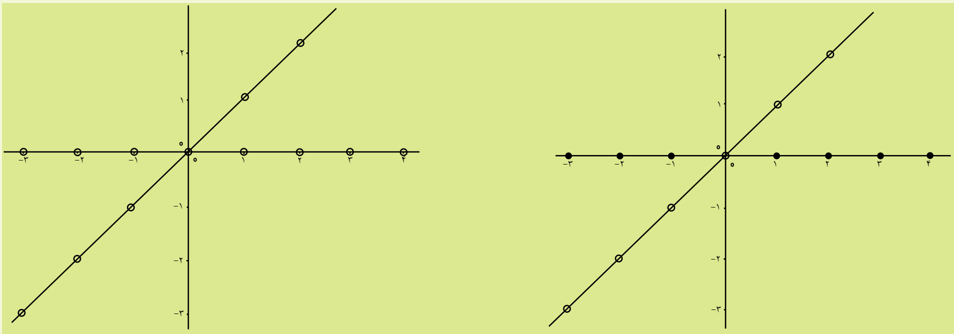
پس نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است و: $\overline{f}(x)=x:R\to R$. در این حالت: $\overline{D_f}=R=D$.

مثال ۵. برای تابع $f(x)=x:R-Z\to R$.

$$D_f=R-Z,\ \ D=R\Rightarrow\ D_f\subset D$$

$f:R-Z\to R$ پیوسته است. به علاوه: $\overline{D_f}=R=D$ و:

$$\bar{f}(x)=x:R\to R$$



گسترش پیوستهٔ توابع

تعریف کنید:

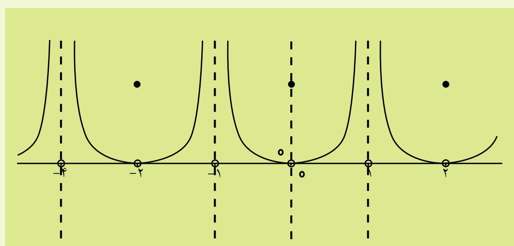
$$2Z=\{,,,-4,-2,0,2,4,6,\ ,,,\},$$
$$2Z+1=\{,,,-3,-1,1,3,\ ,,,\}.$$

لذا:

$$Z=2Z\cup(2Z+1),\qquad R-Z\subset\begin{cases}R-2Z,\\R-(2Z+1).\end{cases}$$

مثال ۶. تابع $f:R-(2Z+1)\to R$ با ضابطهٔ

$$f(x)\ \begin{cases}(\tan(-x)) & x\in R-Z,\\ 1 & x\in 2Z\end{cases}$$



روی R-Z پیوسته است. پیداست:

$$D_f=R-(2Z+1),\ D=R-(2Z+1)\Rightarrow\ D=D_f,$$

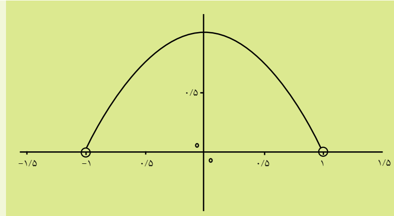
و $\overline{D_f}=R\neq D$. می‌توان پیوســـتگی f را به‌شکل $\bar{f}:R-(2Z+1)\to R$ گســـترش داد. اما ما از لحاظ شهودی نمی‌توانیم بپذیریم که $\bar{f}$ پیوسته است، چون تابع در هر نقطهٔ ۲Z+۱ ناپیوسته است. اما چرا نمی‌توانیم از لحاظ شهودی نقاط ۲Z+۱ را نادیده بگیریم؟ جواب این اســـت که نقاط ۲Z+۱ به مجموعهٔ $D_f=R-(2Z+1)$ چسبیده‌اند، یعنی: $2Z+1\subset\overline{R-(2Z+1)}$ (به شکل دقیق‌تر $\overline{R-(2Z+1)}=R$).

تســـاوی $\overline{D_f}=D$ در مثال‌هـــای ۴ و ۵ نیز اتفاق افتاد، ولی در مثال‌هـــای ۲، ۳ و ۶ صادق نبود. این مثال‌ها بیان می‌کنند که پیوستگی زمانی از لحاظ شهودی مقبول است که تساوی $D=\overline{D_f}$ اتفاق بیفتد. در این صورت می‌توانیم دامنهٔ پیوستگی f را از D به $\overline{D_f}$ گسترش دهیم. به یک مثال دیگر توجه کنید.

مثال ۷. برای تابع

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\in(-1,1),\\ \text{تعریف نشده} & x\notin(-1,1),\end{cases}$$

داریم:



$$D_f=(-1,1),\qquad D=\overline{D}=\overline{D}_f=[-1,1]$$

پس: $D=\overline{D}_f$. به‌طور شهودی تابع f را می‌توانیم به‌عنوان تابع پیوسته بپذیریم. دلیل این امر برآورده شدن رابطهٔ $D=\overline{D}_f$ است. در ادامه اثبات می‌کنیم این نتیجه‌ای خاص نیست.

اما تنها مزیت رابطهٔ $D=\overline{D}_f$ این نیســت که تابع صادق در این رابطه پیوستگی شـــهودی قابل قبولی دارد. کار مهم‌تری که می‌توانیم انجام دهیم، این است که چنین توابعی را می‌توانیم به توابع پیوسته‌ای روی کل R گسترش دهیم؛ خیلی بیشتر از $\overline{D}_f$.
مثلاً در مورد مثال ۷ می‌توانیم f (و یا $\bar{f}$) را به تابع پیوستهٔ $\bar{f}:R\to R$ ربط دهیم:

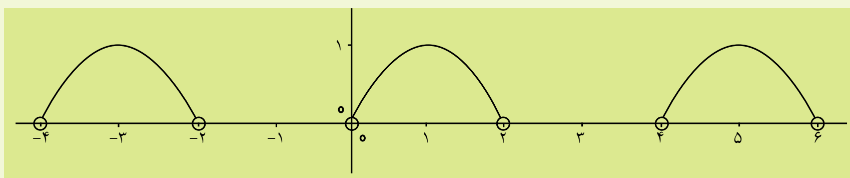
$$\bar{f}(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\in[-1,1],\\ 0 & x\notin(-1,1),\end{cases}$$

حال برمی‌گردیم و مثال‌هایی را که در شرط $D=\overline{D}_f$ صدق می‌کنند، بررسی می‌کنیم.
در مثـــال ۴ می‌بینیـــم که: $D=R=\overline{D}_f$. پس قـــرار می‌دهیـــم: $\bar{f}(x)=\bar{f}(x)=x$. در مثـــال ۵ داریم: $D=R=\overline{D}_f$ لذا $\bar{f}(x)=\bar{f}(x)=x$.

در ایـــن مثال‌ها $\overline{D}_f-D$ نقاط تنها بودند که با تعریف $\bar{f}(x)=\bar{f}(x)=\lim\limits_{x_n\to x}f(x)$ (برای $x\in D$) مشـــکل را حل کردیم. اما حالت‌هایی دیگر اتفاق می‌افتند و مشکل فقط در نقاط تنها نیست.

مثال ۸. تعریف کنید:

$$f(x)=\begin{cases}1-(x-(4n+1))^2 & x\in(4n,4n+2),\quad n\in Z\\ \text{تعریف نشده} & x\notin\bigcup\limits_{n\in Z}(4n,4n+2)\end{cases}$$



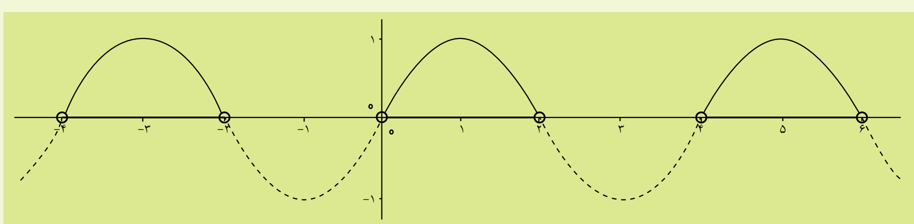
در این مثال:

$$D_f=\cup_{n\in Z}(4n,4n+2),D_f\subset D=\overline{D}_f=\cup_{n\in Z}[4n,4n+2].$$

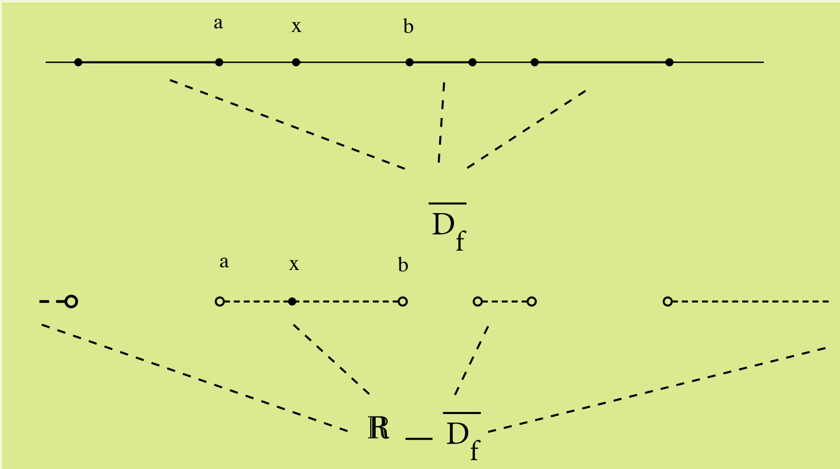
از شکل پیداست می‌توانیم $f:D_f\to R$ به $\bar{f}:R\to R$ را به‌طور پیوسته گسترش دهیم:

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}1-(x-(4n+1))^2 & x\in[4n,4n+2],\ n\in Z\\ 0 & x\notin\cup_{n\in Z}[4n,4n+2].\end{cases}$$

به‌علاوه چون f در D_f مشتق‌پذیر است، می‌توانیم $\tilde{F}:R\to R$ را طوری انتخاب کنیم که $\bar{f}$ نیز مشتق‌پذیر باشد.



سؤال اینجاست که آیا می‌شود این ایده را برای سایر توابع که در شرط $D = \overline{D_f}$ صدق می‌کنند، اجرا کرد؟ در ادامه نشان می‌دهیم که این امر ممکن است.

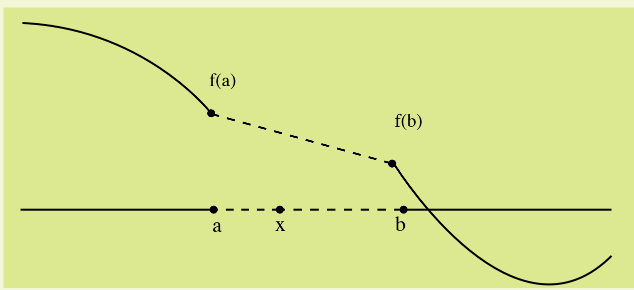


نکته: شکل قبل را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که اگر: $x \in R - \overline{D_f}$، آن‌گاه یک بازه (a,b) می‌توان انتخاب کرد که: $x \in (a,b)$ و $(a,b) \subset R - D_f$.

قضیهٔ ۳. اگر $\overline{D_f} = D$، آن‌گاه می‌توان تابع f را به یک تابع پیوسته روی کل R گسترش داد.

برهان: بنا به نکتهٔ قبل برای هر $x \in R - \overline{D_f}$ یک بازه (a,b) می‌توان انتخاب کرد که $x \in (a,b)$ و $(a,b) \subset R - D_f$.
فرض کنید (a,b) بزرگ‌ترین بازه با این خاصیت باشند. لذا: $a, b \in \overline{D_f}$. از آنجا که $\bar{f}$ روی $D = \overline{D_f}$ تعریف شده، $\bar{f}(a)$ و $\bar{f}(b)$ موجود است. تابع خطی

$$L(x) = \frac{\bar{f}(b) - \bar{f}(a)}{b-a}(x-a) + \bar{f}(a),$$



را روی (a,b) تعریف کنید. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که L روی $[a,b]$ پیوسته است، زیرا:

$L(a) = \bar{f}(a),\ \ L(b) = \bar{f}(b)$

از آنجا که $R - \overline{D_f}$ به‌صورت اجتماعی از بازه‌های باز و مجزاست، روی هر کدام از این بازه‌ها می‌توانیم تابع خطی شبیه $L(x)$ تعریف کنیم. یعنی می‌توانیم $\bar{f}$ را از $\overline{D_f}$ به تابع پیوسته‌ای روی کل R بسط دهیم.

پی‌نوشت

۱. در این فونت عدد صفر به صورت «۰» نمایش داده می‌شود و با نقطه «.» متفاوت است.

منابع

۱. گروه مؤلفان (۱۳۹۰)، حسابان
۲. گروه مؤلفان (۱۳۸۷)، حساب دیفرانسیل و انتگرال
۳. میرزا وزیری، مجید. صال مصلحیان، محمد (۱۳۸۸). فضاهای متریک با طعم توپولوژی، دانشگاه فردوسی، مشهد.

* همه اشکال توسط نرم‌افزار جئوجبرا GeoGebra رسم شده‌اند.